

Exercice I.1 Déterminer $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ de la fonction $z(x, y)$, :

$$z = x^3 - 5xy + y^2$$

solution :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 5y &\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x && ; && \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -5 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -5x + 2y &\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 && ; && \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -5 \end{aligned}$$

Dériver la fonction suivant en fonction de x, en fonction de y, et en fonction de z.

$$g(x, y, z) = 1 + 2y - 3y^2 + 2xz - 3z^2.$$

Calcul des dérivées partielles

$$\begin{aligned} \partial g / \partial x(x, y, z) &= 2z \\ \partial g / \partial y(x, y, z) &= 2 - 6y \\ \partial g / \partial z(x, y, z) &= 2x - 6z \end{aligned}$$

Dériver les fonction suivantes en fonction de x et en fonction de y.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= (x - 5)^2 + (y - 2)^2 \\ \text{b) } f(x, y) &= 2x^2 + 6y^2 - 5x + 4y \\ \text{c) } f(x, y) &= 4x^2 - 12xy + y^2 \end{aligned}$$

Solution

a)

$$\text{On a } \begin{cases} f'_x = 2(x - 5) \\ f'_y = 2(y - 2) \end{cases}$$

b)

$$\text{On a } \begin{cases} f'_x = 4x - 5 \\ f'_y = 12y + 4 \end{cases}$$

c)

$$\text{On a } \begin{cases} f'_x = 8x - 12y \\ f'_y = -12x + 2y \end{cases}$$

Exercice 2 On considère la fonction f suivante :

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 3y$$

a) calculez les dérivées partielles de f et les dérivées secondes de f

Solution

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 3y$$

$$\text{a) On a } \begin{cases} f'_x = 3x^2 + 3y^2 + 6xy \\ f'_y = 3x^2 + 6xy + 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f''_{xx} = 6x + 6y \\ f''_{yy} = 6x \\ f''_{xy} = 6x + 6y \end{cases}$$

Calculer les dérivées partielles et secondes de f .

- a) $f(x, y) = x^2 + 2x + y + y^2$
- b) $f(x, y) = 10 - x^2 - 5y^2 + 3xy - x + 2y$
- c) $f(x, y) = x^2 - 12x + y^2 - 27y$
- d) $f(x, y) = xy - x^2$
- e) $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x - 12y + 10$

Solution

a) $f(x, y) = x^2 + 2x + y + y^2$. On calcule les dérivées premières et secondes :

$$\begin{cases} f'_x = 2x + 2 \\ f'_y = 1 + 2y \end{cases} \quad \begin{cases} f''_{xx} = 2 \\ f''_{yy} = 2 \\ f''_{xy} = 0 \end{cases}$$

b) $f(x, y) = 10 - x^2 - 5y^2 + 3xy - x + 2y$. On calcule les dérivées premières et secondes :

$$\begin{cases} f'_x = -2x + 3y - 1 \\ f'_y = -10y + 3x + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} f''_{xx} = -2 \\ f''_{yy} = -10 \\ f''_{xy} = 3 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 12 \\ f'_y = 2y - 27 \end{cases} \quad \begin{cases} f''_{xx} = 2 \\ f''_{yy} = 2 \\ f''_{xy} = 0 \end{cases}$$

d) $f(x, y) = xy - x^2$ On calcule les dérivées premières et secondes :

$$\begin{cases} f'_x = y - 2x \\ f'_y = x \end{cases} \quad \begin{cases} f''_{xx} = -2 \\ f''_{yy} = 0 \\ f''_{xy} = 1 \end{cases}$$

e) $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x - 12y + 10$ On calcule les dérivées premières et secondes :

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 3 \\ f'_y = 2y - 12 \end{cases} \quad \begin{cases} f''_{xx} = 6x \\ f''_{yy} = 2 \\ f''_{xy} = 0 \end{cases}$$