PROGRAMME BOOSTER 2017

SciencesPo

Booster 2017
Campus de Reims

MATHÉMATIQUES

COURS ET EXERCICES

Collège universitaire de Sciences Po
Première année - Programme Booster

Antoine BERTHEAU, Rémi CHAUTARD,
Jérémy HERVELIN et Sandra NEVOUX

6 au 13 juillet 2017

Sommaire

1. Avant-propos

L'enseignement de mathématiques dans le cadre du Programme Booster a un double objectif. Premièrement, cet enseignement vise à préparer les étudiants aux enseignements de mathématiques et d'économie du premier semestre de première année à Sciences Po. En effet, ces deux enseignements comportent des notions quantitatives et nécessitent donc certains pré-requis mathématiques que notre enseignement s'attache à fournir.

L'enseignement de mathématiques est commun à tous les étudiants de première année. Il consiste en 24 heures de cours, réparties en 12 séances hebdomadaires de 2 heures. Il prend la forme d'une conférence de méthode, faisant intervenir une classe d'une vingtaine d'étudiants et un maître de conférences. Cette conférence de méthode a pour objectif d'expliquer les notions quantitatives et mathématiques abordées, ainsi que d'entraîner et de préparer les étudiants à l'examen final (comptant pour un tiers de la moyenne finale - le contrôle continu comptant pour deux tiers et étant laissé à la convenance du maître de conférences).
Cet enseignement se décline selon trois niveaux :

- **Le niveau introductif**, destiné aux étudiants issus d'un Baccalauréat Littéraire sans Spécialité "Mathématiques", ou bien les étudiants qui estiment avoir trop peu d'acquis pour suivre cet enseignement à un niveau supérieur. L'objectif de cet enseignement est de rappeler aux étudiants les bases de calcul nécessaires à la compréhension de problèmes simples de sciences économiques et l'apprentissage de méthodes et techniques nouvelles permettant d'aller plus loin en sciences humaines.
- **Le niveau intermédiaire**, destiné aux étudiants issus d'un Baccalauréat Économique et Social, ou bien les étudiants qui estiment maîtriser suffisamment les techniques calculatoires de base mais dont les connaissances et l'agilité technique restent modestes. L'objectif de cet enseignement est de rappeler aux étudiants les bases de calcul nécessaires à la compréhension de problèmes simples en sciences économiques et l'apprentissage de techniques nouvelles pour aborder des problèmes plus complexes en microéconomie notamment.
- **Le niveau avancé**, destiné aux étudiants issus d'un Baccalauréat Scientifique, ou bien les étudiants qui estiment avoir un bon niveau de maîtrise des outils mathématiques et qui sont désireux de suivre un formation mathématique d'un niveau supérieur. Malgré tout, cet enseignement a pour première vocation à former de solides techniciens dont l'usage des méthodes mathématiques sera investi au profit des sciences humaines, économiques et sociales.

Le premier enseignement d'économie, intitulé "Introduction au raisonnement économique : principes d'économie", est commun à tous les étudiants de première année. Il consiste en un cours magistral et en une conférence de méthode, chacun décliné en 48 heures, réparties en 12 séances hebdomadaires de 2 heures. Le cours magistral est assuré par Yann ALGAN et peut être suivi en présentiel (recommandé) ou en ecours (http ://ecours.sciences-po.fr). La conférence de méthode fait intervenir une classe d'une vingtaine d'étudiants (cette classe restant la même pour les conférences de méthode des autres enseignements fondamentaux) et un maître de conférences. Cette conférence de méthode a pour objectif d'expliquer, d'approfondir et de compléter le cours magistral, d'identifier les points essentiels à retenir, de poser des questions ainsi que d'entraîner et de préparer les étudiants à l'examen final. En plus des cours magistraux et des conférences de méthode, les étudiants les plus en difficulté ont la possibilité de s'inscrire au tutorat qui constitue un cours de soutien. L'examen final compte pour un tiers dans la moyenne finale et constitue une épreuve écrite commune à tous les étudiants de première année. Il a lieu à la fin du premier semestre, est d'une durée de 3 heures, couvre l'intégralité de l'enseignement d'économie. Les copies sont corrigées aléatoirement par les différents maîtres de conférences. Le contrôle continu compte pour deux tiers dans la moyenne finale et est en grande partie laissé à la convenance de chaque maître de conférences, hormis pour le galop d'essai qui compte pour un tiers de la note de contrôle continu. Il s'agit d'un examen blanc commun à tous les étudiants de première année. Il a lieu au milieu du premier semestre, est d'une durée de 2 heures et couvre l'intégralité de l'enseignement d'économie abordé à cette date et est identique à l'examen final dans sa structure. Chaque maître de conférences corrige les copies de ses étudiants et intègre les notes de leur galop à leur moyenne de contrôle continu.
Le programme de l'enseignement d'économie est organisé comme suit :

- Introduction à l'économie : Penser comme un économiste
- La croissance de long-terme
- Ressources et choix stratégiques
- Interactions sociales et institutions
- L'entreprise, le consommateur et le marché
- Défaillances de marché
- Marché financier et marché du travail
- Fluctuations économiques, chômage et politique budgétaire
- Fluctuations économiques, inflation et politique monétaire
- L'économie domestique et le monde
- La Grande Dépression, l'âge d'or et la crise financière
- Inégalités et justice sociale

"If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is." (Von Neumann (1947))

L'utilisation des mathématiques se justifie par la limite de l'homme à comprendre le monde qui l'entoure. La complexité des relations existantes, aussi bien dans les mondes de l'infiniment petit que l'infiniment grand étudiés en physique et biologie, rend essentiel l'abstraction et la modélisation. Il en va de même pour les sciences sociales de manière générale et les interactions humaines plus spécifiquement. La prise de décision, aussi simple paraît-elle, est la conséquence logique d'une multitude d'actions et connections établies par les neurones et permises par les synapses. Ces décisions sont la plupart du temps issues d'une partie objective et subjective. La partie objective renvoie à des situations quantifiables grâce auxquelles l'individu déduit une action. La partie subjective renvoie quant à elle à la perception que retire l'individu d'expériences passées similaires qui altèrent l'action préalablement définie. De nombreuses études en théorie des jeux et plus récemment en neuroéconomie ont montré que cette part subjective joue un rôle crucial dans la prise de décision. Il a également été montré que cette part subjective dépend directement des capacités non-cognitives des individus. Les compétences non-cognitives sont généralement regroupées sous l'acronyme OCEAN : Ouverture à l'expérience (curiosité, imagination, éventail des intérêts personnels), Conscienciosité (autodiscipline, sens du devoir, désir de réalisation), Extraversion (confiance en soi, enthousiasme, sociabilité), Agréabilité (écoute, altruisme, empathie) et Névrosisme (émotions, humeur, stress + “locus de contrôle” interne ou externe). Cette part subjective, par nature et définition, est propre à chaque sujet. Néanmoins, afin de déduire la meilleure action possible et limiter le rôle de l'émotion sur la raison, une pensée claire et structurée est nécessaire. Comprendre au mieux ses ressentis est alors une condition nécessaire pour se sentir bien et avancer. C'est ce que permettent les mathématiques de manière directe, voire indirecte pour les individus dénués d'intérêt pour cette discipline. Être étudiant de Sciences Po amène à occuper des postes à responsabilité, engendrant stress et charge de travail conséquente. La maîtrise de soi et la clarté de la pensée, afin de toujours prendre les meilleures décisions, sont requises afin de réussir le cursus de Sciences Po. Étudier les mathématiques de manière sérieuse en est la première étape.

Enfin rappelez-vous : *"We use math not because we are smart, but because we are not smart enough."* (Rodrik (2007))

Première partie

Notions préliminaires

1. Calcul

1.1 Addition

$$a + b = c$$

ex : 10+5=15

1.2 Soustraction

$$a - b = c$$

ex : 10-5=5 ; 5-10=-5 ; -10-5=-15

1.3 Multiplication

$$a * b = c$$

ex : 10×5=50 ; 10 ×(-5)=-50 ; (-10)×(-5)=50

1.4 Division

$$\forall b \neq 0 : \frac{a}{b} = c$$

ex : $\frac{10}{5} = 2$

2. Règle de trois

2.1 Définition

On considère une évolution simple d'une variable à valeurs positives entre un état initial x_0 et un état final x_1.

	État initial	État final
Valeur	x_0	x_1

Définition : Le taux d'évolution en % de cette variable, noté $t\%$, est la part en pourcentage de la différence $x_1 - x_0$ par rapport à la valeur initiale x_0 :

$$t\% = \frac{x_1 - x_0}{x_0} \times 100$$

Dynamique :

- Si $x_1 > x_0$, alors $t\% > 0$, ce qui caractérise une augmentation.
- Si $x_1 < x_0$, alors $t\% < 0$, ce qui caractérise une diminution.
- Si $x_1 = x_0$, alors $t\% = 0$, ce qui caractérise une stagnation.

2.2 Exercice-type

Une variable X enregistre une évolution de x_0 à x_1.
1. Calculer son taux d'évolution en %.
2. Indiquer s'il s'agit d'une augmentation, d'une diminution ou d'une stagnation.

3. Espérance

3.1 Définition

Définition : L'espérance du revenu (ou le revenu espéré) R_e est calculé(e) en pondérant le revenu que l'agent percevrait dans chaque état de la nature (R_i) par les probabilités respectives des états de nature possibles (P_i) :

$$R_e = P_1 * R_1 + P_2 * R_2 + P_3 * R_3 + ...P_n * R_n$$

Note : La somme des probabilités doit impérativement être égale à 1.

3.2 Exercice-type

Un agent économique fait face à plusieurs situations i, chacune rapportant un revenu R_i et associée à une probabilité p_i de survenir. Calculer et interpréter l'espérance du revenu de cet agent.

4. Réexpression

$$y = ax + b \Rightarrow x = \frac{y-b}{a}$$

4.1 Exercice-type

Un agent économique dispose d'un revenu R à allouer intégralement entre la consommation de deux biens A et B dont les quantités et prix respectifs sont Q_A, p_A, Q_B et p_B.
1. Exprimer R en fonction des autres variables.
2. A partir de la réponse à la question 1., exprimer tour à tour Q_A et Q_B en fonction des autres variables.

5. Système linéaire

5.1 Méthode de résolution

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax + by & = & c \\ dx + ey & = & f \end{array}\right.$$

Méthode de résolution :

- Choisir une des deux équations et réexprimer une des deux variables (par exemple x) en fonction du reste.
- Substituer dans l'autre équation la variable x par sa nouvelle expression ainsi obtenue et calculer la valeur de la variable y.
- Substituer dans une des deux équations initiales la valeur de la variable y ainsi obtenue et calculer la valeur de la variable x.

5.2 Exercices-type

5.2.1 Exercice 1

Un agent économique dispose d'un revenu R à allouer intégralement entre la consommation de deux biens A et B dont les quantités et prix respectifs sont Q_A, p_A, Q_B et p_B. Étant donné les valeurs de Q_A, p_A, Q_B et p_B, calculer R.

5.2.2 Exercice 2

Un agent économique dispose d'un revenu R à allouer intégralement entre la consommation de deux biens A et B dont les quantités et prix respectifs sont Q_A, p_A, Q_B et p_B. De plus, la quantité consommée totale des deux biens est Q. Étant donné les valeurs de R, p_A, p_B et Q, calculer Q_A et Q_B.

6. Formules spécifiques

6.1 Valeur absolue

Définition : On appelle valeur absolue de x, que l'on note $|x|$, la distance qui sépare x de 0 :

- Si $x \geqslant 0$, $|x| = x$.
- Si $x \leqslant 0$, $|x| = -x$.

6.2 Puissance

$$a^n$$

6.3 Exponentielle

$$\exp(x) = e^x$$

6.4 Logarithme népérien

$$ln(x)$$

Deuxième partie

Fonctions

1. Fonctions

Les fonctions présentées ci-dessous seront étudiées uniquement sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, les valeurs négatives de la variable x n'étant pas pertinentes en microéconomie.

1.1 Définition

	Fonction univariée	**Fonction multivariée**	**Interprétation**
Fonction discrète	$f(x)$	$f(x,z)$	Variation de y en fonction de x (et z)
Fonction continue	$f(x)$	$f(x,z)$	Variation de y en fonction x (et z)

Note : L'inverse de la fonction $f(x)$ est notée $f^{-1}(x)$.
ex : $y = f(x) = 5x + 3 \Rightarrow x = f^{-1}(x) = \frac{y-3}{5}$

1.2 Formules

Fonctions usuelles	**Définition**	
Fonction affine	$f(x) = a + bx$	$a, b \in \mathbb{R}$
Fonction carrée	$f(x) = a + bx^2$	$a, b \in \mathbb{R}$
Fonction racine carrée	$f(x) = a + b\sqrt{x}$	$a, b \in \mathbb{R},\ x > 0$
Fonction inverse	$f(x) = \frac{a}{x}$	$a \in \mathbb{R},\ x \neq 0$
Fonction logarithme	$f(x) = a + b\ln(x)$	$a, b \in \mathbb{R},\ x > 0$
Fonction exponentielle	$f(x) = a + b\exp(x)$	$a, b \in \mathbb{R}$
Fonction puissance	$f(x) = bx^a$	$a, b \in \mathbb{R}$

1.3 Représentation graphique

Une fonction se trace dans un plan constitué d'une ligne horizontale (l'axe des abscisses) et d'une ligne verticale (l'axe des ordonnées) graduées, dont l'intersection constitue l'origine, c'est-à-dire la valeur 0 pour ces deux axes. Les valeurs de la variable x sont déterminées par rapport à l'axe des abscisses et les valeurs de la variable $f(x)$ par rapport à l'axe des ordonnées.
Une fonction discrète est représentée par des points tandis qu'une fonction continue est représentée par une ligne continue.

Fonctions usuelles	**Graphique de la fonction**
Fonction affine	
Fonction carrée	
Fonction racine carrée	
Fonction inverse	
Fonction logarithme	
Fonction exponentielle	
Fonction puissance	

1.4 Exercices-type

1.4.1 Exercice 1

Représenter graphiquement une fonction linéaire du type $f(x) = ax + b$.
Astuce :

- Calculer la valeur de la variable $f(x)$ quand $x = 0 =>$ Point sur l'axe des ordonnées (ordonnée à l'origine).
- Réexprimer la variable x en fonction de $f(x)$ et calculer la valeur de la variable x quand $f(x) = 0 =>$ Point sur l'axe des abscisses.
- Représenter ces deux points dans le plan et tracer la droite reliant ces deux points $=>$ Courbe représentative de la fonction $f(x) = ax + b$.

1.4.2 Exercice 2

Représenter graphiquement une fonction discrète, continue, univariée et/ou bivariée dans le plan et interpréter son évolution.

2. Pente et dérivées

2.1 Définition

	Fonction univariée $f(x)$	**Fonction multivariée $f(x,z)$**	**Interprétation**
Fonction discrète = Pente	$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$\frac{\Delta f(x,z)}{\Delta x} = \frac{f(x_2,z)-f(x_1,z)}{x_2-x_1}$ (z constante)	Variation de $f(x)$ en réponse à une hausse de x d'une unité (z constante)
Fonction continue = Dérivée	Dérivée totale : $f'(x)$ OU $\frac{df(x)}{dx}$	Dérivée partielle : $\frac{\delta f(x,z)}{\delta x}$ (z constante)	Variation de $f(x)$ en réponse à une hausse de x d'une petite quantité (z constante)

Notes :

- Les notions de pente et de dérivée sont utilisées de manière indifférenciée.
- Le coefficient directeur est la pente ou la dérivée d'une fonction linéaire discrète ou continue de type $f(x) = ax + b$ et est égal à a.

2.2 Formules

Fonctions usuelles	**Définition** (cf. 2.2)	**Dérivée première**	**Dérivée seconde**
Fonction affine	$f(x) = a + bx$	$f'(x) = b$	$f''(x) = 0$
Fonction carrée	$f(x) = a + bx^2$	$f'(x) = 2bx$	$f''(x) = 2b$
Fonction racine carrée	$f(x) = a + b\sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{b}{2\sqrt{x}}$	$f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$
Fonction inverse	$f(x) = \frac{a}{x}$	$f'(x) = -\frac{a}{x^2}$	$f''(x) = \frac{2a}{x^3}$
Fonction logarithme	$f(x) = a + b\ln(x)$	$f'(x) = 1x$	$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$
Fonction exponentielle	$f(x) = a + b\exp(x)$	$f'(x) = b\exp(x)$	$f''(x) = b\exp(x)$
Fonction puissance	$f(x) = bx^a$	$f'(x) = abx^{a-1}$	$f''(x) = (a-1)abx^{a-2}$

2.3 Opérations

Soient u et v deux fonctions :

Fonctions	**Dérivées**
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$u \circ v$	$v'(u' \circ v)$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u^{\alpha-1}u'$
u^{-1}	$\frac{1}{u' \circ u^{-1}}$

2.4 Représentation graphique

Graphiquement, la dérivée d'une fonction en un point constitue le coefficient directeur de la droite tangente à la courbe représentative de cette fonction en ce point.
La droite tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point approxime le mieux cette courbe localement en ce point.
En ce point de tangence, les dérivées de la fonction initiale et de sa droite tangente sont donc égales.

2.5 Exercices-type

2.5.1 Exercice 1

Calculer la dérivée d'une fonction linéaire de type $f(x) = ax + b$.
Note : Le coefficient directeur est la dérivée d'une fonction linéaire de type $f(x) = ax+b$ et est égal à a.

2.5.2 Exercice 2

Calculer la dérivée d'une fonction et la représenter graphiquement.

3. Fonctions et dérivées

3.1 Définition

Dynamique de la fonction	**Signe de la dérivée**
Croissance (stricte)	(Strictement) positif
Décroissance (stricte)	(Strictement) négatif
Constance	nul

3.2 Représentation graphique

3.3 Exercice-type

Calculer la dérivée d'une fonction et interpréter son signe.

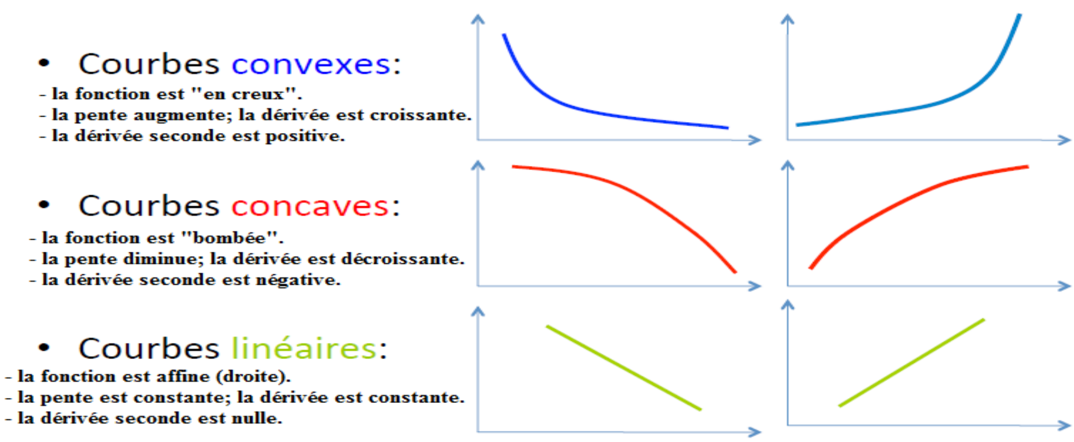
4. Fonctions, dérivées et dérivées secondes

4.1 Courbure

4.1.1 Définition

Courbure	**Dérivée première positive...**	**Dérivée première négative...**
Dérivée seconde positive $\Rightarrow$ Convexité	et croissante $\Rightarrow f(x)$ augmente de plus en plus vite avec x	et croissante $\Rightarrow f(x)$ diminue de moins en moins vite avec x
Dérivée seconde négative $\Rightarrow$ Concavité	et décroissante $\Rightarrow f(x)$ augmente de moins en moins vite avec x	et décroissante $\Rightarrow f(x)$ diminue de plus en plus vite avec x
Dérivée seconde nulle $\Rightarrow$ Linéarité	et constante $\Rightarrow f(x)$ augmente constamment avec x	et constante $\Rightarrow f(x)$ diminue constamment avec x

4.1.2 Représentation graphique



4.1.3 Exercice-type

Calculer les dérivées première et seconde d'une fonction et interpréter leur signe.

4.2 Extremum

4.2.1 Définition

Extremum de la fonction	**Signe de la dérivée première**	**Signe de la dérivée seconde**
Maximum	Nul	(Strictement) negatif
Minimum	Nul	(Strictement) positif

4.2.2 Représentation graphique

4.2.3 Exercice-type

1. Calculer les dérivées première et seconde d'une fonction.
2. Déterminer la valeur de la variable x pour laquelle la dérivée première est nulle.
3. Calculer la valeur de la dérivée seconde pour cette valeur de la variable x.
4. Conclure quant aux caractéristiques de cette valeur de la variable x.

Troisième partie

Applications

1. Application 1 : Utilité

1.1 Définition

Définition : Une fonction marginale se définit comme la dérivée de la fonction en question et s'interprète comme la variation marginale de cette fonction associée à une augmentation d'une petite quantité de x.

Exemples : Utilité, coût, production, profit.

Définition : La fonction d'utilité représente le niveau de satisfaction d'un individu en fonction de sa consommation d'un bien A et est dénotée $U(A)$.

Représentation graphique : Cette fonction est représentée dans le plan $(A, U(A))$.

Définition : L'utilité marginale de la consommation du bien A, dénotée $U_m(A)$, est l'utilité supplémentaire que procure à l'agent une augmentation d'une unité de sa consommation du bien A. En d'autres termes, cette utilité marginale est la valeur de la dérivée de la fonction d'utilité par rapport à A en ce point.

Propriétés de $U(A)$:

- **Propriété (1) :** L'utilité est une fonction croissante de la consommation du bien.
  - **Non-satiété des préférences :** Une hausse (respectivement baisse) de A entraine une augmentation (respectivement diminution) de l'utilité.
  - $U(A)$ croissante $\Rightarrow U_m(A) \geqslant 0$.
- **Propriété (2) :** L'utilité marginale est une fonction décroissante de la consommation du bien.
  - **Définition :** La loi de l'utilité marginale décroissante indique que chaque unité supplémentaire consommée d'un bien procure à l'agent un supplément d'utilité moindre que le supplément d'utilité que lui procure la consommation de l'unité précédente de ce bien.
  - $U(A)$ concave $\Rightarrow U_m(A)$ décroissante $\Rightarrow$ dérivée seconde négative.

1.2 Application

De tout temps, l'économie a attisé les passions. Le tableau ci-dessous indique la satisfaction éprouvée par Stéphanie en fonction du nombre d'heures qu'elle passe pour étudier la microéconomie chez elle.

H	0	1	2	3	4	5	6	7
S	0	15	25	30	33	31	25	17
Sm								

- ***H*** désigne le nombre d'heures passées en microéconomie.
- ***S*** désigne la satisfaction totale de Stéphanie en fonction du nombre d'heures passées en microéconomie.
- ***Sm*** désigne la satisfaction marginale de Stéphanie.

1. Représenter graphiquement la satisfaction en fonction des heures.
2. Calculer et interpréter la satisfaction marginale.
3. Commenter la courbure de cette fonction.

2. Application 2 : Coût

2.1 Définition

Définition : Le coût, noté $C(Q)$, fait référence au coût de production.

Représentation graphique : Cette fonction est représentée dans le plan $(Q, C(Q))$.

Définition : Le coût marginal $C_m(Q)$ d'une unité supplémentaire de production est la variation du coût de production associée à la hausse d'une unité de production.

Propriétés de $C(Q)$:

- **Propriété (1) :** Le coût est une fonction croissante de la production du bien.
  - **Interprétation** : $C_m(Q)$ est positif, c'est-à-dire que le coût associé à une unité supplémentaire de production est positif et par suite le coût total augmente à mesure que la production augmente.
  - $C(Q)$ croissant $\Rightarrow C_m(Q) \geqslant 0$.
- **Propriété (2) :** Le coût marginal est une fonction croissante de la production du bien.
  - **Intepretation :** $C_m(Q)$ est croissant, c'est-à-dire que le coût associé à une unité supplémentaire de production augmente à mesure que le niveau de production augmente.
  - **Explication :**
    - Pour chaque nouvelle unité d'un facteur de production (travail), le coût de production augmente (de w) alors que la production augmente de moins en moins vite. Pour augmenter la production d'une unité, au fur et à mesure que le niveau de production augmente, il faut embaucher davantage de salariés supplémentaires et par suite dépenser davantage pour les salaires de ces salariés supplémentaires.
    - Cela provient du fait que le coût de chaque unité de facteur supplémentaire est constant mais que leur productivité marginale est décroissante.
    - La production d'une unité supplémentaire coûte de plus en plus cher à l'entreprise à mesure que la production totale augmente.
    - **Raisons :** Heures supplémentaires / Nouveaux équipements / Marchés éloignés.
  - $C(Q)$ convexe $\Rightarrow C_m(Q)$ croissant $\Rightarrow$ dérivée seconde positive.

2.2 Application

Le coût étant une fonction de type convexe, représenter graphiquement le coût en fonction de la production, calculer et interpréter le coût marginal et commenter la courbure de cette fonction.

3. Application 3 : Rendements d'échelle

3.1 Définition

Q est défini comme le niveau de production exprimé en fonction de la quantité de travail L et de capital K utilisées :

$$Y = Q(K, L)$$

Rendements d'échelle	**Equation**	**Interprétation**
Constants	$Q(\lambda * L, \lambda * K) = \lambda * Q(L, K)$	Si l'entreprise multiplie chacun de ses facteurs par λ, la production est également multipliée par λ.
Croissants	$Q(\lambda * L, \lambda * K) > \lambda * Q(L, K)$	Si l'entreprise multiplie chacun de ses facteurs par λ, la production augmente plus que proportionnellement aux facteurs, ce qui entraine une diminution du coût marginal, accroît la production à moyens constants et engendre donc des économies d'échelle.
Décroissants	$Q(\lambda * L, \lambda * K) < \lambda * Q(L, K)$	Si l'entreprise multiplie chacun de ses facteurs par λ, la production augmente moins que proportionnellement aux facteurs, ce qui entraîne une hausse du coût marginal, diminue la production à moyens constants et engendre donc des déséconomies d'échelle. Chaque unité supplémentaire produite coûte plus cher que la précédente.

Note : λ désigne le facteur d'échelle.

3.2 Application

La fonction de production étant de type $Q(L, K)$, déterminer si cette fonction de production présente des rendements d'échelle constants, croissants ou décroissants.

4. Application 4 : Productivité marginale

4.1 Définition

Note : La productivité marginale, le produit marginal et la production marginale sont des notions équivalentes.

Définition :

- Le produit marginal d'un facteur est égal à la variation de la quantité produite due à une petite augmentation de la quantité du facteur utilisé.
- La productivité marginale est la dérivée de la fonction de production par rapport à ses facteurs :
  - Productivité marginale du travail$=\frac{\Delta Q}{\Delta L}$ ou $\frac{\delta Q}{\delta L}$.
  - Productivité marginale du capital$=\frac{\Delta Q}{\Delta K}$ ou $\frac{\delta Q}{\delta K}$.

Propriétés :

- Fonction de production croissante.
- Productivité marginale décroissante.

$\Rightarrow$ Fonction de production concave.

Exemple : le premier travailleur est très productif, le second un peu moins, le troisième encore moins.

4.2 Application

La production étant une fonction de type concave, représenter graphiquement la production en fonction de l'un de ses facteurs, calculer et interpréter la productivité marginale et commenter la courbure de cette fonction.

5. Application 5 : Profit

5.1 Définition

L'objectif de l'entreprise est de maximiser son profit.

Définition : Le profit est la différence entre le revenu total et le coût total :

$$\Pi = R - C = p * Q - C(Q)$$

5.2 Application

Le coût étant une fonction de type convexe et le revenu étant une fonction linéaire de la production, représenter graphiquement le profit en fonction de la production. Calculer et interpréter le profit marginal. Déterminer la valeur de Q pour laquelle la dérivée première est nulle. Interpréter cette valeur de Q.

6. Application 6 : Élasticité

6.1 Définition

Définition : On appelle ***élasticité*** de y par rapport à x, notée $e_{y/x}$, le rapport entre le taux d'évolution en % de y et le taux d'évolution en % de x.
Calcul :

- Si x passe de la valeur x_0 à x_1, le taux d'évolution en % vaut donc :
$$\frac{x_1-x_0}{x_0} \times 100$$
- Si y passe de la valeur y_0 à y_1, le taux d'évolution en % vaut donc :
$$\frac{y_1-y_0}{y_0} \times 100$$
- Ainsi :
$$e_{y/x} = \frac{\frac{y_1-y_0}{y_0} \times 100}{\frac{x_1-x_0}{x_0} \times 100} = \frac{\frac{y_1-y_0}{y_0}}{\frac{x_1-x_0}{x_0}}$$

Interprétation : L'élasticité s'interprète comme la variation en % de x en réponse à une variation de 1% de y.

6.2 Application

Une variable X enregistre une évolution de x_0 à x_1 et une variable Y enregistre une évolution de y_0 à y_1.
1. Calculer le taux d'évolution en % des variables X et Y.
2. A partir de la question 1., calculer l'élasticité de la variable Y par rapport à X.
3. Interpréter la valeur de cette élasticité.