Séance 10: Théorie des Jeux

Sandra Nevoux

Sciences Po

Jeudi 19 Novembre 2015

Introduction

- Les agents prennent des décisions en fonction des décisions des autres agents avec lesquels ils intéragissent.
- Contexte: militaire, politique, jeux, psychologie.
- Petit nombre d'acteurs:
  - Monopole: le monopoleur prend sa décision en fonction de la courbe de demande.
  - Oligopole: les oligopoleurs prennent leurs décisions en fonction de la courbe de demande mais également en fonction des décisions des autres oligopoleurs.

L'essentiel à retenir

1. Définitions
2. Équilibre de Cournot-Nash
3. Dilemme du prisonnier statique en stratégies pures
4. Dilemme du prisonnier répété infini en stratégies pures
5. Expériences de Robert Axelrod
6. Bataille des sexes statique en stratégies pures
7. Jeu à somme nulle statique en stratégies pures

Définitions

Théorie des jeux

La théorie des jeux est une branche des sciences mathématiques qui étudie les mécanismes de prise de décision des agents dans les situations où ceux-ci tiennent compte dans leur processus de prise de décision du mécanisme de prise de décision des autres agents.
Chaque agent suppose que les autres agents sont rationnels $\Rightarrow$ Dans sa prise de décision l'agent 1 tient donc compte de la réponse optimale pour l'agent 2.
(L'agent 1 suppose que l'agent 2 va choisir la meilleure réponse pour lui compte-tenu de la situation ; il sait également que l'agent 2 procède de même lorsqu'il détermine sa réponse optimale, soit en considérant quelle sera la réponse optimale pour le 1er agent compte-tenu de la situation).

Hypothèses

- **Rationalité:** maximisation des gains.
- **Symétrie d'information:** tous les agents ont accès à l'ensemble de l'information.
- **Common knowledge:** les agents sont rationnels et supposent également la rationalité des autres agents.

Jeu

- **Définition:** un jeu est une situation dans laquelle deux agents (ou plus) poursuivent leur intérêt et dans laquelle chaque agent est amené à tenir compte de la réponse des autres agents dans le cadre de sa prise de décision.
- **Définition:** les interactions stratégiques caractérisent le mécanisme de prise de décision de l'agent dans la situation du jeu. Dans le cadre d'une prise de décision en interaction stratégique, l'agent tient compte de la (meilleure) réponse des autres agents en définissant sa propre stratégie.

Jeu - Dimensions

- Nombre de joueurs: 2 ou plus.
- Nombre d'actions: 2 ou plus.
- Nombre de périodes:
  - Jeu statique: 1 seule période.
  - Jeu dynamique (ou répété) fini: T périodes.
  - Jeu dynamique (ou répété) infini: une infinité de périodes ou dernière période inconnue.
- Actions simultanées ou séquentielles.

$\Rightarrow$ On considère ici des jeux à deux joueurs avec des actions prises simultanément.

Jeu - Typologie

- **Définition:** Un jeu à somme nulle est un jeu tel que, quelle que soit la paire des stratégies choisie par les 2 joueurs, la somme des payoffs est constante.
- Jeux à somme variable:
  - **Définition:** Les jeux de coopération sont des jeux à somme variable : si les deux agents choisissent la stratégie de coopération, ils maximisent le gain collectif. Dans un jeu de coopération, la stratégie de non-coopération est sous-optimale du point de vue collectif ; toutefois, la stratégie de non-coopération peut être optimale du point de vue individuel de chacun des joueurs.
  - **Définition:** Les jeux de coordination sont des jeux a somme variable. Ils se caractérisent par le fait que les deux joueurs ont intérêt à se coordonner afin de maximiser le gain collectif. Les jeux de coordination se distinguent des jeux dits de coopération par le fait que dans un jeu de coordination plusieurs équilibres de coordination sont possibles alors que dans un jeu dit de coopération, il n'y a aucun équilibre de coopération.
  - Jeux de coexistence.

Jeu - Déroulement

- **Étape 1:** les modalités du jeu sont définies.
  - 2 joueurs.
  - Actions.
  - Payoffs (gains) associés à chaque couple d'action.
  - Nombre de périodes.
  - Stratégies pures ou mixtes.

  $\Rightarrow$ Représentation du jeu sous forme d'une matrice de payoffs.
- **Étape 2:** les joueurs définissent leurs stratégies (pures ou mixtes) optimales en fonction des actions prises par les autres joueurs.
- **Étape 3:** Un (respectivement des) équilibre(s) de Nash est (respectivement sont) éventuellement défini(s).

Stratégie

- **Définition:** Une stratégie est une action entreprise par l'un des joueurs quelque soit l'action de l'autre joueur (des autres joueurs). Une stratégie dominante pour le joueur X est une stratégie telle que pour toute action de l'autre joueur (des autres joueurs), elle maximise le gain du joueur X.
- **Définition:** Une stratégie pure est le choix par le joueur d'une seule et même action et ce quelque soit l'action de l'autre joueur (stratégie déterministe ou stratégie dominante).
- **Définition:** Une stratégie mixte correspond au choix par le joueur d'une stratégie qui combine plusieurs actions différentes de manière aléatoire. Cela signifie que le joueur attribue une probabilité à chaque choix d'action et joue ces choix sur la base de ces probabilités. La valeur espérée du jeu pour le joueur est alors égale a son utilité espérée : il s'agit d'une valeur attribuée au jeu ex ante.

Équilibre de Nash

- **Définition:** L'équilibre de Nash est une situation dans laquelle chaque joueur choisit sa meilleure réponse compte tenu de la réponse de l'autre. Aucun agent n'a intérêt individuellement de changer de stratégie sachant la stratégie de l'autre agent. L'équilibre de Nash implique la cohérence mutuelle des stratégies optimales de chacun des agents.
- **Théorème de Nash:** Dans tout jeu fini et quel que soit le nombre de joueurs, il existera toujours au moins un équilibre de Nash.
- Remarque importante: existence d'au moins un équilibre de Nash en stratégies pures ET mixtes.

Matrice de payoffs

		Joueur B	
		Action 1	Action 2
Joueur A	Action 1	(P_{11}, P'_{11})	(P_{12}, P'_{12})
	Action 2	(P_{21}, P'_{21})	(P_{22}, P'_{22})

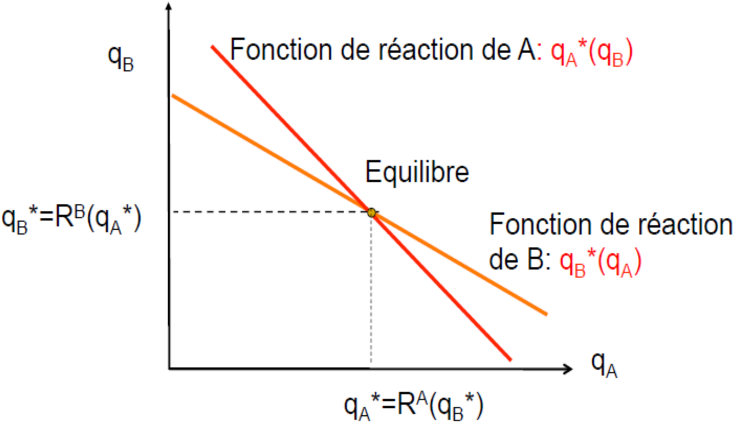
Notations

- Le jeu à deux joueurs et deux actions est représenté sous forme d'une matrice de payoffs.
- Chaque ligne correspond à une action entreprise par le joueur A. Chaque colonne correspond à une action entreprise par le joueur B.
- P_{xy} représente le payoff obtenu par le joueur A si le joueur A prend l'action x et le joueur B prend l'action y. P'_{xy} représente le payoff obtenu par le joueur B si le joueur A prend l'action x et le joueur B prend l'action y.
- Les actions des joueurs A et B sont notées q_A et q_B et sont égales à 1 ou 2.
- Fonctions de réaction:
  - Une fonction de réaction R_A définit la meilleure action q_A^* du joueur A, en réponse à l'action q_B choisie par le joueur B:
  $$q_A^* = R_A(q_B)$$
  - Une fonction de réaction R_B définit la meilleure action q_B^* du joueur B, en réponse à l'action q_A choisie par le joueur A:
  $$q_B^* = R_B(q_A)$$

Équilibre de Cournot-Nash

Lorsque deux entreprises se partagent un marché en produisant un bien homogène et en ayant des parts de marché égales, on est en présence d'un duopole symétrique.
Les deux entreprises sont en situation d'interaction stratégique : chacune s'efforce de maximiser son profit en considérant que l'autre entreprise cherche également à maximiser son profit.
On peut exprimer la décision de production de chaque oligopoleur comme une fonction de réaction à la production de son rival : $q_1(q_2)$ et $q_2(q_1)$. Les deux fonctions de réaction sont des relations décroissantes puisque la hausse de la production d'un oligopoleur entraîne une baisse des prix et, par conséquent, une réduction de la quantité produite par l'autre oligopoleur.
La recette totale de chaque entreprise est :
$R(q_1) = p(Q) * q_1 = p(q_1 + q_2) * q_1$
$R(q_2) = p(Q) * q_2 = p(q_1 + q_2) * q_2$.
Pour chaque entreprise, le choix optimal est :
$R_m(q_1) = p(q_1 + q_2) * [1 + (\frac{q_1}{Q}) * (\frac{1}{\epsilon})] = C_m(q_1)$
$R_m(q_2) = p(q_1 + q_2) * [1 + (\frac{q_2}{Q}) * (\frac{1}{\epsilon})] = C_m(q_2)$
Il existe alors un choix de q_1^* et de q_2^* mutuellement cohérents : q_2^* est choisi lorsque q_1^* est choisi et réciproquement. (q_1^*, q_2^*) est dit « équilibre de Cournot-Nash ».

Représentation graphique



Dilemme du prisonnier statique en stratégies pures

Principe

- Deux voleurs complices ont commis un forfait. Ils sont arrêtés et la police aimerait obtenir des aveux afin de les condamner lourdement. Les voleurs se sont promis, avant d'être arrêtés, de ne pas se trahir. La police les interroge séparément et essaie d'obtenir des aveux de chacun d'eux en promettant une amnistie à celui qui parlera, s'il est le seul à parler. Les prisonniers savent qu'ils ne seront pas condamnés lourdement s'ils coopèrent effectivement en ne parlant pas à la police. Mais ils ont une incitation individuelle à avouer leur crime et éventuellement à être amnistiés.
- Deux voleurs = deux joueurs.
- Deux actions = nier ou avouer.
- Payoffs = nombre d'années de prison.

Représentation

		Stratégies du voleur 2	
	(voleur 1, voleur 2)	Nier	Avouer
Stratégies du voleur 1	Nier	(-1,-1)	(-5,0)
	Avouer	(0,-5)	(-4,-4)

Méthode

Comment trouver l'équilibre de Nash?

- Définition de la fonction de réaction R_A du joueur A:
  - Si le joueur B nie, le joueur A a intérêt à avouer.
  - Si le joueur B avoue, le joueur A a intérêt à avouer.

  $\Rightarrow$ Quelque soit l'action choisie par le joueur B, le joueur A a toujours intérêt à avouer.
  $\Rightarrow$ Le choix de l'action "avouer" pour le joueur A est donc une stratégie dominante. A contrario, le choix de l'action "nier" est donc une stratégie dominée.
- Même raisonnement pour le joueur B (jeu symétrique).
- Équilibre de Nash: (-4, -4).

Propriétés de l'équilibre de Nash (1)

- Similitudes avec l'équilibre de marché en CPP:
  - Rationalité.
  - Spontanéité.
  - Stabilité.
- Différences avec l'équilibre de marché en CPP:
  - Jeu de coopération $\Rightarrow$ Au maximum un équilibre de Nash en stratégies pures.
  - En général: potentielle multiplicité des équilibres de Nash.
  - Sous-optimalité au sens de Pareto et en termes de surplus collectif.

Propriétés de l'équilibre de Nash (2)

- Potentielle multiplicité des équilibres de Nash $\Rightarrow$ L'équilibre atteint dépend de l'histoire et des croyances des joueurs.
- Sous-optimalité au sens de Pareto et en termes de surplus collectif:
  - Équilibre non-coopératif: le dilemme du prisonnier est un jeu de coopération.
  - Équilibre sous-optimal: on pourrait augmenter le surplus individuel et collectif en changeant les stratégies des joueurs.
  - Rationalité individuelle vs. Rationalité collective.

  $\Rightarrow$ Justification de l'intervention publique: faire émerger la coopération des joueurs afin de maximiser le surplus individuel et collectif.
- Équilibre de marché = Équilibre de Nash particulier dans lequel les agents sont de taille infiniment petite et donc dont les interactions stratégiques sont négligeables.

Théorème de Nash

- Le théorème de Nash stipule l'existence de l'équilibre de Nash, mais ne nous renseigne en rien sur:
  - les caractéristiques de cet équilibre.
  - la manière de l'atteindre.
  - son unicité/multiplicité.
- L'équilibre de Nash n'est pas toujours un bon prédicteur du comportement des joueurs: violation de l'hypothèse de common knowledge.

Dilemme du prisonnier répété fini en stratégies pures

Principe

- **Définition:** un jeu répété est un jeu tel que les joueurs jouent plusieurs manches en retenant à chaque étape successive du jeu le résultat des manches précédentes. Dans le cadre d'un jeu répété, une stratégie est une règle de prise de décision sachant les actions et les résultats des actions passées.
- **Définition:** Un jeu fini est un jeu dont la fin est connue avec certitude par tous les joueurs.
- Hypothèse: les joueurs de ce jeu retiennent le résultat des tours précédents.
- Choix de la meilleure action à chaque tour en prenant en compte d'une part les réponses possibles de l'autre joueur et d'autre part les actions de l'autre joueur depuis le début du jeu.

Stratégies

- ***All D:*** Toujours faire défection.
- ***All C:*** Toujours coopérer.
- ***Tit-for-Tat:*** Donnant-donnant=faire ce que l'adversaire a fait au coup précédent après avoir coopéré au premier coup.
- ***Permanent retaliation:*** Rancune tenace=coopérer jusqu'à ce que l'adversaire fasse défection; à partir de la défection de l'adversaire, toujours faire défection.
- **Random:** jouer de manière aléatoire.
- Autres stratégies plus complexes.

Raisonnement par induction

Définition: Dans le cadre d'un jeu répété fini (à T périodes), chaque joueur définit sa stratégie depuis la première et jusqu'à la dernière manche à rebours : le joueur part de sa décision optimale à la dernière période, en déduit sa décision optimale à l'avant-dernière période, en déduit sa décision optimale à l'avant-avant-dernière période et ainsi de suite jusqu'à définir sa réponse optimale à la 1ère période du jeu. Le raisonnement à rebours décrit ci-dessus est appelé raisonnement par induction ou backward induction (en anglais).

Méthode

Comment trouver l'équilibre de Nash? $\Rightarrow$ Raisonnement par induction:

- Dernière période T:
  - Équivalent du jeu statique $\Rightarrow$ Équilibre non-coopératif.
- Avant-dernière période (T-1):
  - Objectif: inciter la coopération en dernière période.
  - Or, quelque soit la stratégie en période (T-1), équilibre non-coopératif en période T.
  - Équilibre non-coopératif en période (T-1) également.
- Et ainsi de suite.

Dilemme du prisonnier répété infini en stratégies pures

- **Définition:** Un jeu infini est un jeu qui continue jusqu'à la fin des temps ou s'arrête de façon imprévue par les agents (aléatoirement par exemple).
- **Folk theorem:** en jeux répétés infinis, presque toutes les solutions sont possibles.
- Si les agents sont suffisamment patients en jeux répétés infinis, des stratégies comportant des phases de coopération réciproques sont des équilibres de Nash.

Coopération

Émergence de la coopération:

- Sous la contrainte:
  - Loi ou contrat.
  - Modification de la structure des payoffs.
- Spontanément:
  - Dans le cadre de jeux répétés infinis et si les agents sont suffisamment patients.
  - Norme.

Norme

- **Définition:** une norme est un objet qui émerge plus ou moins spontanément sur un marché quand celui-ci est défaillant.
- Une norme peut être "volontaire" ou imposée.
- Exemple: pollution et normes sociales/environnementales.
- Une norme peut-être plus ou moins suffisante pour restaurer la coopération:
  - Insuffisance lorsque la CPP avantage plus fortement les entreprises qui se conforment le moins à la norme.
  - Son efficacité dépend du nombre d'agents s'y conformant

    $\Rightarrow$ Équilibres multiples.
- Limites: la norme est un objet mal identifié, ad hoc et évolutif.

Expériences de Robert Axelrod

Description

- Tournoi représentant un dilemme du prisonnier répété pendant 200 parties.
- Chaque participant rédige un programme dans un langage informatique simple (basic ou fortran) représentant sa stratégie préférée.
- Chaque programme est opposé à tour de rôle à tous les autres programmes, y compris lui-même, et à un programme jouant aléatoirement la stratégie C ou la stratégie D.
  $\Rightarrow$ Éviter que tous les participants ne se coordonnent spontanément sur (D, D) sur les 200 périodes et compliquer la tâche de programmes qui tentent de deviner la stratégie de leur adversaire.
- Le gagnant est le participant ayant cumulé le plus de points au total.
- 15 programmes en lice: longueur variant de 4 à 77 lignes.
- Les programmes tentent de comprendre la stratégie de l'adversaire et de choisir les actions en conséquence.

Résultats

			Joueur 2
		Nier (C)	Avouer (D)
	Nier (C)	(3,3)	(5,0)
Joueur 1	Avouer (D)	(0,5)	(1,1)

- Le programme aléatoire a réalisé le plus bas score: 276.
- Les programmes sophistiqués ne sont pas forcément ceux qui ont fait les meilleurs scores.
- Le programme "Tit-for-Tat" est vainqueur avec un score de 504 par manche.
- Le deuxième meilleur programme a réalisé un score de 500 points.

Conseils

- Ne pas être envieux: ne pas essayer de prendre à l'autre des points (sinon équilibre non-coopératif) mais bâtir la coopération.
- Ne pas être trop méchant, i.e. ne pas être le premier à faire défection et commencer par essayer de coopérer.
- Ne pas être trop gentil, i.e. ne pas hésiter à rendre la pareille et punir.
- Ne pas être trop intelligent.

Bataille des sexes statique en stratégies pures

- Deux joueurs: deux personnes de sexes opposés aimeraient sortir ensemble.
- Deux actions: match de boxe ou opéra.
- Le garçon préfère la boxe et la fille préfère l'opéra, mais aucun ne souhaite être séparé de l'autre.
- Ils ne peuvent pas se parler avant et doivent donc se retrouver à l'un des endroits en tentant de deviner où l'autre ira.

Représentation

		Fille	
		B	C
Garçon	B	(4,1)	(0,0)
	C	(0,0)	(1,4)

Méthode

Comment trouver l'équilibre de Nash?

- Définition de la fonction de réaction R_A du garçon:
  - Si la fille choisit l'opéra, le garçon choisit l'opéra.
  - Si la fille choisit la boxe, le garçon choisit la boxe.
- Même raisonnement pour la fille.
- 2 Équilibres de Nash: (4, 1) et (1, 4).

Propriétés de l'équilibre de Nash

- Jeu de coordination $\Rightarrow$ Plusieurs équilibres de Nash en stratégies pures.
- Optimalité au sens de Pareto et en termes de surplus collectif.
- Un équilibre de Nash favorise un joueur par rapport à l'autre et les deux joueurs ne sont donc pas indifférents entre les deux équilibres.
- **Comment déterminer l'équilibre de Nash choisi?**
  - Communication entre les deux joueurs.
  - Point focal: cet équilibre a une connotation particulière ou un signe distinctif qui va le faire choisir sans raison évidente par les joueurs.
  - Leader de Stackelberg: l'un choisit et l'autre s'aligne sur le choix du premier.
  - Stratégies mixtes.

Jeu à somme nulle statique en stratégies pures

Principe

- **Définition:** Un jeu à somme nulle est un jeu tel que, quelle que soit la paire des stratégies choisie par les 2 joueurs, la somme des payoffs est constante.
- Deux joueurs choisissent entre papier, ciseaux et caillou.

				Joueur 2
		Feuille (F)	Ciseaux (S)	Pierre (P)
	Feuille (F)	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	(0,1)	(1,0)
	Ciseaux (S)	(1,0)	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	(0,1)
Joueur 1	Pierre (P)	(0,1)	(1,0)	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

Méthode

Comment trouver l'équilibre de Nash?

- Définition de la fonction de réaction R_A du joueur A:
  - Si le joueur B choisit "papier", le joueur A choisit "ciseaux".
  - Si le joueur B choisit "ciseaux", le joueur A choisit "caillou".
  - Si le joueur B choisit "caillou", le joueur A choisit "papier".
- Même raisonnement pour le joueur B.
- Aucun équilibre de Nash.

Stratégies mixtes

Principe

- Mélanger dans une urne les stratégies pures en proportions variables en choisissant simplement ces proportions et tirer aléatoirement l'une de ces stratégies sans pouvoir changer d'avis une fois le tirage effectué.
- La stratégie d'équilibre mixte d'un joueur est celle qui rend l'autre joueur indifférent entre les diverses probabilités associées aux actions.

Jeu à somme nulle

- L'équilibre de Nash en stratégies mixtes dans un jeu à somme nulle est: $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3});(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.
- Autres applications:
  - Penalties au football.
  - Service au tennis.
  - Bluff au poker.

Bataille des sexes (1)

- p_G est la probabilité que le garçon joue son choix préféré (boxe) et donc $(1 - p_G)$ est la probabilité que le garçon aille à l'opéra.
- p_F est la probabilité que la fille joue son choix préféré (opéra) et donc $(1 - p_F)$ est la probabilité que la fille aille à la boxe.
- Calcul de l'espérance de payoff de chaque joueur lorsqu'il prend les probabilités de l'autre joueur comme données.

$$E(U_G) = p_G * (1 - p_F) * 4 + p_G * p_F * 0 + (1 - p_G) * (1 - p_F) * 0 + (1 - p_G) * p_F * 1$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{U}_G) = 4 * p_G - 5 * p_G * p_F + p_F$$

$$E(U_F) = p_G * (1 - p_F) * 1 + p_G * p_F * 0 + (1 - p_G) * (1 - p_F) * 0 + (1 - p_G) * p_F * 4$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{U}_F) = 4 * p_F - 5 * p_G * p_F + p_G$$

Bataille des sexes (2)

- Dériver l'espérance de son payoff par rapport à sa probabilité:

$$\frac{\delta E(U_G)}{\delta p_G} = 4 - 5 * p_F$$

- Fixer cette dérivée égale à 0:

$$\frac{\delta E(U_G)}{\delta p_G} = 0 \Rightarrow p_F = \frac{4}{5}$$

- $p_F = \frac{4}{5}$ est la stratégie d'équilibre mixte de la fille à partir de l'espérance du payoff du garçon: c'est la stratégie de la fille qui rend le garçon indifférent entre les divers p_G.
- Idem pour le garçon.
- Équilibre de Nash: (4/5; 4/5).

$\Rightarrow$ Au total, Équilibre(s) de Nash en stratégies pures+Équilibre(s) de Nash en stratégies mixtes=Nombre total d'équilibre(s) de Nash.